Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 13: Elementare Graphenalgorithmen (B4,K22,K24.2)

Prof. Dr. Erika Ábrahám

Theorie Hybrider Systeme
Informatik 2

http://ths.rwth-aachen.de/teaching/ss-14/
datenstrukturen-und-algorithmen/

Diese Präsentation verwendet in Teilen Folien von Joost-Pieter Katoen.

20. Juni 2014 und 26. Juni 2014

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, ...)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen
- Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, ...
- Semantische Netze (z. B. Entity-Relationship-Diagramme)

Wir werden uns auf fundamentale Graphalgorithmen konzentrieren.

Gerichteter Graph

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: Digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ von Kanten (edges).

Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ von Kanten (edges).

Auch für ungerichtete Kanten verwenden wir die Notation (u, v).

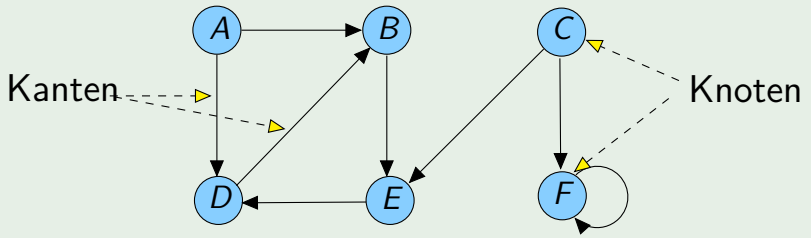
Adjazent

Knoten $v \in V$ ist adjazent zu $u \in V$, wenn $(u, v) \in E$.

Gerichteter Graph

Beispiel

- $V = \{A, \ldots, F\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (B, E), (C, E), (C, F), (D, B), (E, D), (F, F)\}$

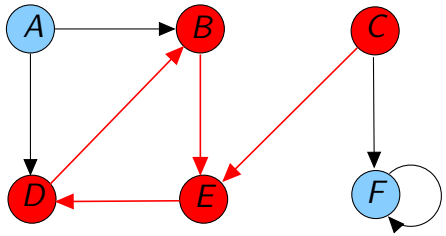


Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.
- Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' echter (proper) Teilgraph.



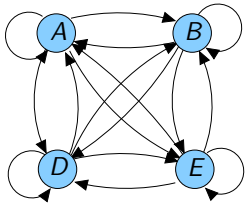
Beispiel: Rote Knoten und Kanten bilden einen Teilgraphen

Terminologie bei Graphen

Symmetrischer Graph

Der Graph G heißt symmetrisch, wenn aus $(u, v) \in E$ folgt $(v, u) \in E$.

- Zu jedem ungerichteten Graphen gibt es einen korrespondierenden symmetrischen Digraphen.



Beispiel: Symmetrischer Digraph

Vollständiger Graph

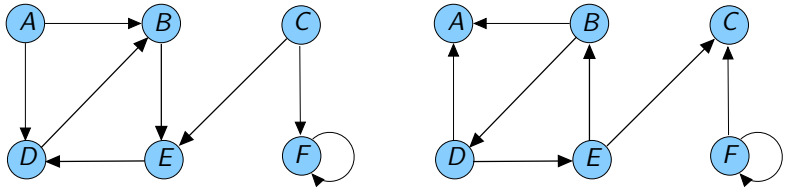
Ein ungerichteter Graph ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten durch eine Kante verbunden ist.

Terminologie bei Graphen

Transponieren

Transponiert man $G = (V, E)$ (transpose graph), so erhält man $G^T = (V, E')$ mit $(v, u) \in E'$ gdw. $(u, v) \in E$.

- In G^T ist die Richtung der Kanten von G umgedreht.



Beispiel: Ein Graph und sein transponierter Graph

Pfade und Zyklen

Pfad (Weg)

Ein Pfad der Länge k vom Knoten $u \in V$ zum Knoten $w \in V$ in $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k$ von Knoten $v_i \in V$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $v_0 = u$ und $v_k = w$.

- Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.
- Einen Pfad der Länge 0 nennen wir leer.
- Ein Pfad mit $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ heißt einfach.
- Knoten w ist erreichbar von u, wenn es einen Pfad von u nach w gibt.

Pfade und Zyklen

Zyklen in gerichtenen Graphen

Ein Zyklus in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

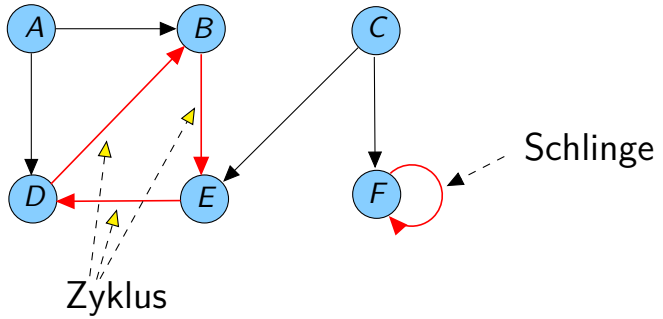
- Ein Zyklus vv der Länge 1 heißt Schlinge (self-loop).
- Ein Zyklus $v_0 \ldots v_k$ ist einfach wenn $v_1 \ldots v_k$ paarweise verschiedenen sind.
- Ein gerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Zyklen in ungerichteten Graphen

Ein Zyklus in einem *ungerichteten* Graph ist ein Pfad $v_0 \ldots v_k$ mit $k \geqslant 3$, $v_0 = v_k$ und $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschieden.

- Ein ungerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Pfade und Zyklen



$A\,B\,E\,D\,B$ und $C\,F\,F$ sind Pfade.

$E\,D\,B$ und $C\,F$ sind einfache Pfade.

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein ungerichteter Graph.

- G heißt zusammenhängend (connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component, CC) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G.

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

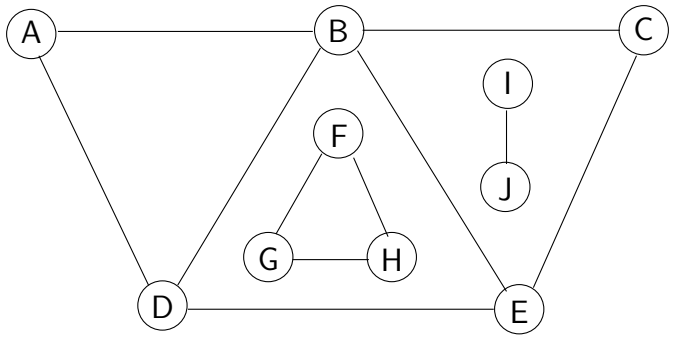
Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend (weakly connected), wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component, SCC) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

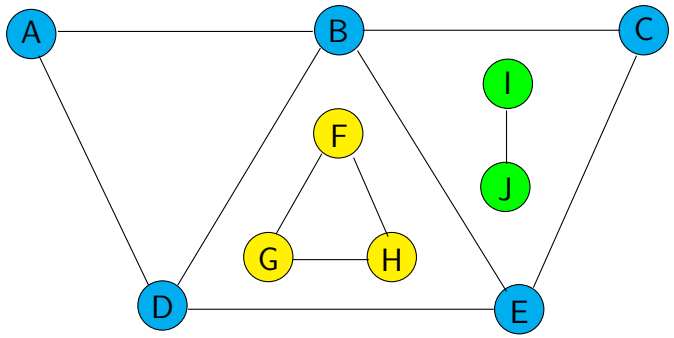
- Die Zerlegung eines Graphen in seine Zusammenhangskomponente ist eindeutig.

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



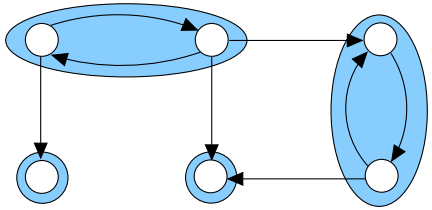
Ein ungerichteter Graph; Was sind die Zusammenhangskomponenten?

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



Die Zusammenhangskomponenten.

Starke Zusammenhangskomponenten



Ein Digraph und seine SCCs.

Zusammenhang

Bemerkungen

- Ein Baum (zusammenhängender azyklischer Graph) mit n Knoten hat $n-1$ Kanten.
- Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und weniger als $n-1$ Kanten kann nicht zusammenhängend sein.
- Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und mindestens n Kanten muss einen Zyklus enthalten.

Übersicht

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ Matrix A gegeben, wobei $A(i,j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n^2)$.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

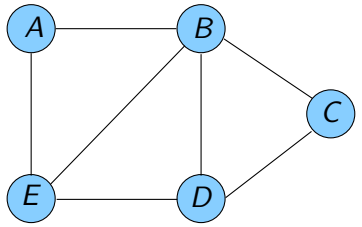
Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

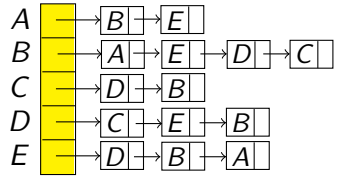
- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- Kanten, die in G nicht vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n + m)$.

Darstellung eines ungerichteten Graphen



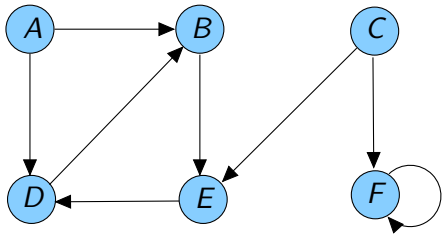


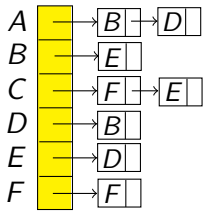
Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Darstellung eines gerichteten Graphen





Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Übersicht

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Da Graphen zyklisch sein können, müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.
- Im Folgenden nehmen wir an, dass Graphen in der Adjazenzlisten-Darstellung gespeichert sind.
- Der Zeitaufwand von Algorithmen auf dieser Basis sind in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Übersicht

Breitensuche

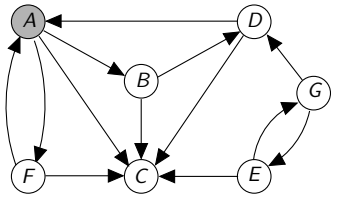
Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

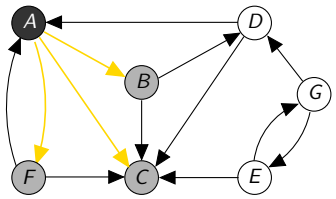
- Markiere den aktuellen Knoten v als "gefunden" (`GRAY`).
- Suche „gleichzeitig" aus allen "gefundenen" Knoten weiter:
  - Markiere alle ihrer noch "nicht-gefundenen" Nachfolger als "gefunden" und
  - markiere die Knoten selbst als "abgeschlossen" (`BLACK`).

- Man erhält die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

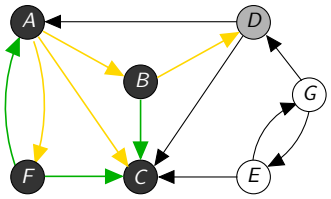
Breitensuche: Beispiel



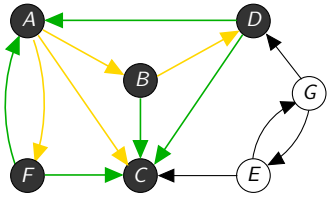
Beginn der Breitensuche



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Fertig!

Breitensuche: Implementierung

```
1  void BFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2    Queue wait; // zu verarbeitende Knoten
3    color[start] = GRAY; // start ist noch zu verarbeiten
4    wait.enqueue(start);
5    while (!wait.isEmpty()) {// nächster unverarbeiteter Knoten
6      int v = wait.dequeue();
7      foreach (w in adj[v]) {
8        if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
9          color[w] = GRAY; // w ist noch zu verarbeiten
10         wait.enqueue(w);
11       }
12     }
13     color[v] = BLACK; // v ist abgearbeitet
14   }
15 }

17 void completeBFS(List adj[n], int n) {
18   int color[n] = WHITE; //noch kein Knoten ist gefunden worden
19   for (int i = 0; i < n; i++)
20     if (color[i] == WHITE) BFS(adj, n, i, color);
21 }
```


Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d+1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.

Theorem (Komplexität der Breitensuche)

Die Zeitkomplexität ist $\mathcal{O}(|V|+|E|)$, der Platzbedarf $\Theta(|V|)$.

Übersicht

Tiefensuche

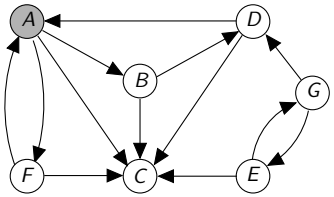
Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

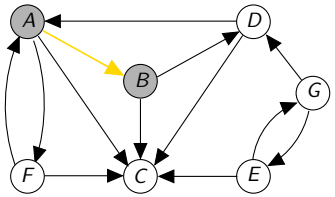
- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v,u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (u,w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Markiere u als „abgeschlossen“ (`BLACK`).
  - Backtracke von u nach v.
- Markiere v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

- Man erhält wieder die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

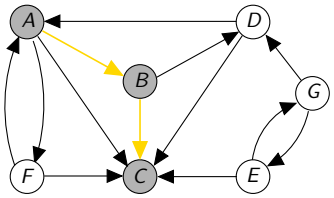
Tiefensuche: Beispiel



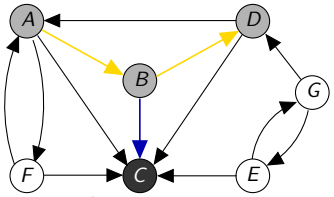
Beginn der Tiefensuche



Erforsche einen Knoten

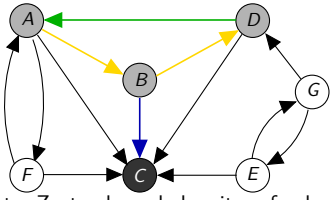


Erforsche einen Knoten

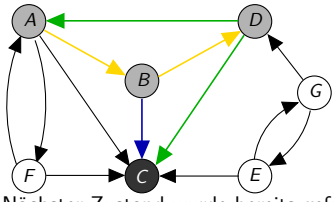


Sackgasse!
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

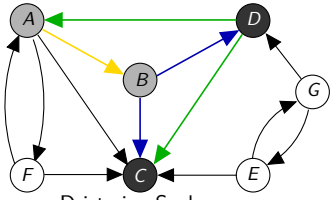
Tiefensuche: Beispiel



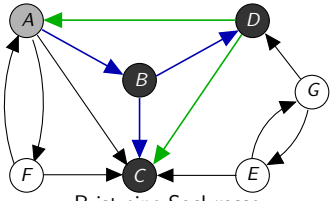
Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

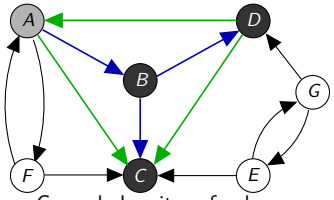


D ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

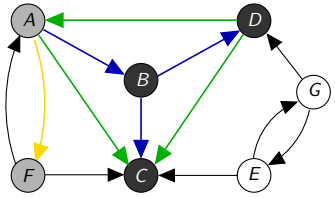


B ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

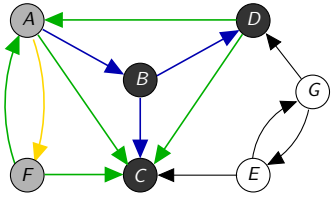
Tiefensuche: Beispiel



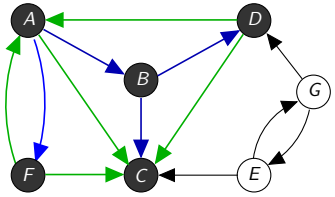
C wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Erforsche den nächsten Knoten



Beide nächsten Knoten wurden bereits gefunden



Fertig!

Tiefensuche: Implementierung

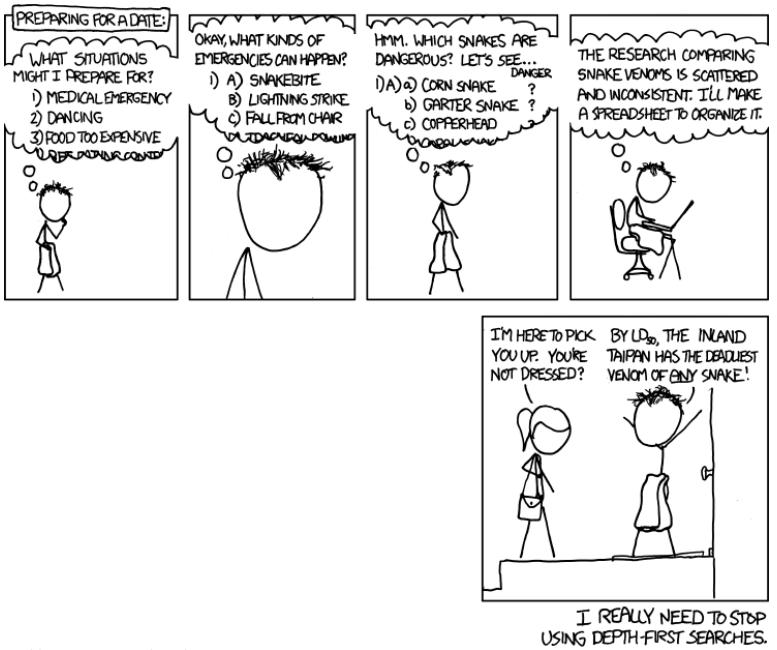
```
1  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2    color[start] = GRAY; // start ist noch zu verarbeiten
3    foreach (w in adj[start]) {
4      if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
5        DFS(adj, w, color);
6      }
7    }
8    color[start] = BLACK; // start ist abgeschlossen
9  }

11 void completeDFS(List adj[n], int n, int start) {
12   int color[n] = WHITE; //noch kein Knoten ist gefunden worden
13   for (int i = 0; i < n; i++)
14     if (color[i] == WHITE) DFS(adj, i, color);
15 }
```

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.

Theorem (Komplexität der Tiefensuche)

Zeitkomplexität: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, *Platzkomplexität:* $\Theta(|V|)$.



Quelle: `http://www.xkcd.com/761/`

Übersicht

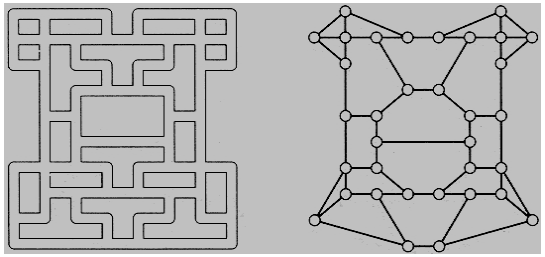
Irrgärten

"Das eben geschieht den Menschen, die in einem Irrgarten hastig werden: Eben die Eile führt immer tiefer in die Irre."

[Lucius Annaeus Seneca (4 n. Chr. – 65 n. Chr.)]

Geschichte

- Tiefensuche wurde bereits vor Jahrhunderten formal beschrieben als ein Verfahren zum Durchqueren von Labyrinthen.
- Labyrinth als Graph:
  - Knoten: Stellen, an denen mehr als ein Weg gewählt werden kann
  - Kanten: Wege zwischen Knoten
  - Eingang als spezieller Knoten `start`
  - Ziel als spezieller Knoten `target`



Erreichbarkeitsanalyse: DFS Implementierung

```
1  bool DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2           int target, List path) {
3    if (start == target){
4      path.addAtFront(start); return true;
5    }
6    color[start] = GRAY;
7    foreach (w in adj[start]) {
8      if (color[w] == WHITE) {
9        if (DFS(adj, w, color, target, path)) {
10         path.addAtFront(start); return true;
11       }
12     }
13   }
14   color[start] = BLACK;
15   return false;
16 }
17 bool reach(List adj[n], int n, int start, int target,
18                  List &path) { // path ist leer
19   int color[n] = WHITE;
20   return DFS(adj, start, color, target, path);
21 }
```


Übersicht

CCs in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein ungerichteter Graph.

- G heißt zusammenhängend (connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component, CC) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G.

CCs in ungerichteten Graphen

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten (CCs) eines ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Finden des CCs eines Knotens v:*
  Verwende Tiefen- oder Breitensuche, um alle aus v erreichbaren Knoten zu bestimmen.
- *Die Zeitkomplexität ist $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

CCs in ungerichteten Graphen

```
1  // Ausgabe in cc: cc[v] = Komponente von Knoten v
2  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
3                 int leader, int &cc[n]) {
4    color[start] = GRAY;
5    foreach (next in adj[start])
6      if (color[next] == WHITE)
7        DFS(adj, next, color, leader, cc);
8    color[start] = BLACK;
9    cc[start] = leader; // speichere das CC von start
10 }

12 void connComponents(List adj[n], int n, int &cc[n]) {
13   int color[n]= WHITE;
14   for (int v = 0; v < n; v++)
15     if (color[v] == WHITE) // weitere Komponente
16       DFS(adj, v, color, v, cc);
17 }
```


Übersicht

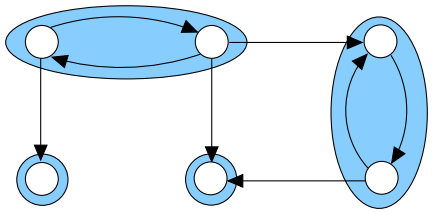
SCCs in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component, SCC) von G ist ein maximaler (d.h., nicht erweiterbarer) stark zusammenhängender Teilgraph von G.

Starke Zusammenhangskomponenten (SCCs)



Ein Digraph und seine SCCs.

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

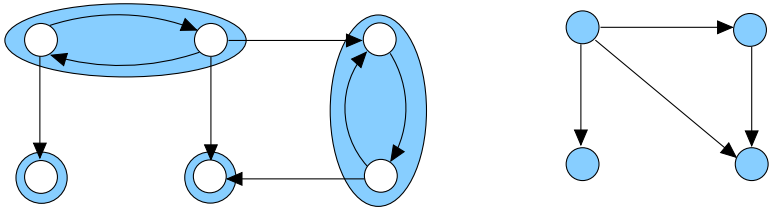
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.
- $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow}$ ist azyklisch.

Kondensationsgraph: Beispiel



Ein Digraph und seine Kondensation.

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

1. Die SCCs von G und G^T sind die selben.
2. Die Kondensation und die Transposition kommutieren, d. h.:

$$(G{\downarrow})^T = (G^T){\downarrow}.$$

Algorithmus zum Finden von SCCs

Sharir's Algorithmus findet SCCs in zwei Phasen:

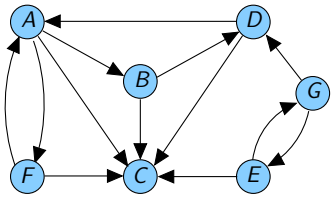
1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
2. Färbe alle Knoten wieder `WHITE`.
3. Wiederhole solange S noch weiße Knoten enthält:
   - Wähle den obersten noch weißen (Leiter-)Knoten v vom S.
   - Führe DFS mit Startknoten v auf dem transponierten Graphen G^T aus und speichere für jeden besuchten Knoten den Leiterknoten v als Repräsentanten seines SCCs.

Leiter einer SCC

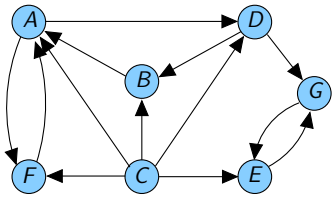
Ein Knoten v heißt Leiter (leader), wenn er als letzter Knoten aus seinem SCC bei einer DFS `BLACK` gefärbt wird.


```
1 void DFS1(List adj[n], int start, int &color[n], Stack &S) {
2   color[start] = GRAY;
3   foreach (w in adj[start])
4     if (color[w] == WHITE) DFS1(adj, w, color, S);
5   color[start] = BLACK; S.push(start);
6 }
7 void DFS2(List adj[n], int start, int &color[n], int leader,
8           int &scc[n]) {
9   color[start] = GRAY;
10  foreach (w in adj[start])
11    if (color[w] == WHITE) DFS2(adj, w, color, leader, scc);
12  color[start] = BLACK; scc[start] = leader;
13 }
14 void sharir(List adj[n], int n) {
15  int color[n] = WHITE; Stack S; int scc[n];
16  for (int i = 0; i < n; i++) // Phase 1
17    if (color[i] == WHITE) DFS1(adj, i, color, S);
18  List adj_T = adj^T;
19  for (int i = 0; i < n; i++) color[i] = WHITE;
20  while (!S.empty()){ // Phase 2
21    int v = S.pop();
22    if (color[v] == WHITE) DFS2(adj_T, v, color, v, scc);
23  }
24 }
```


Sharir's Algorithmus: Beispiel

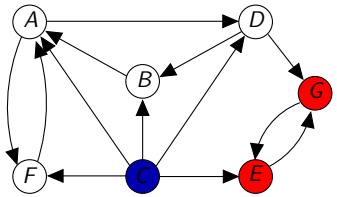


Ursprünglicher Digraph



Transponierter Graph

Stack am Ende der Phase 1



In Phase 2 gefundene starke Komponenten

Korrektheit

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.
- Der Stack benötigt $\Theta(|V|)$ Speicher.

Übersicht

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf Digraphen.
- Ein DAG entspricht einer partiellen Ordnung $<$ auf den Knoten:
  - Eine Kante (v, w) besagt: $v > w$.

  $\Rightarrow$ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keinen Zyklus enthalten.

- Wir betrachten: Topologische Sortierung und Kritische-Pfad-Analyse.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

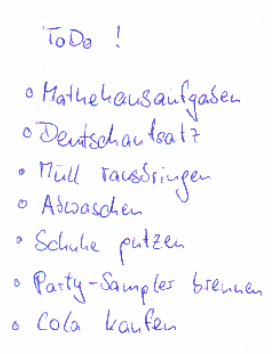
$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Lemma

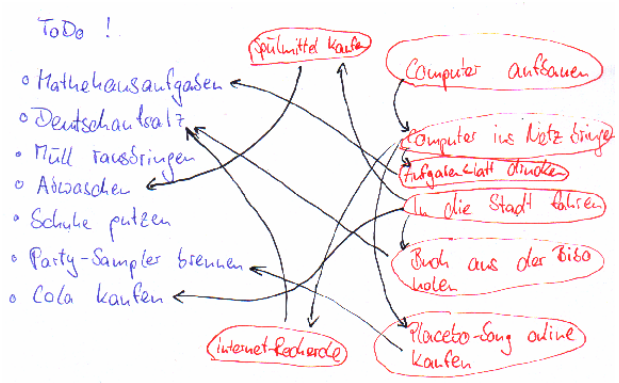
1. *Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert keine topologische Ordnung.*
2. *Jeder DAG G dagegen hat mindestens eine topologische Ordnung.*

Topologische Sortierung: Beispiel 1



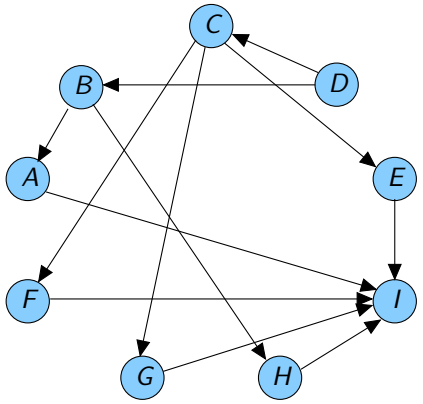
Quelle: http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/-algorithmus/algo8.php

Topologische Sortierung: Beispiel 1



Quelle: http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/-algorithmus/algo8.php

Topologische Sortierung: Beispiel 2



Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	–

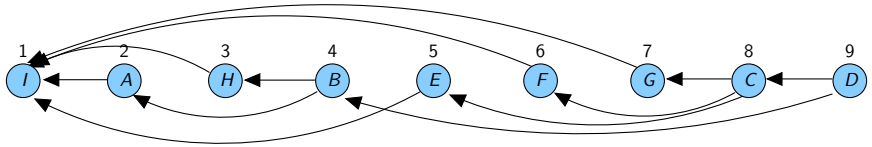
Abhängigkeitsgraph

- Gibt es einen Schedule für dieses Problem? D. h. kann man eine Reihenfolge finden, um alle Aufgaben ausführen zu können?

Topologische Sortierung: Implementierung

```
1  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2                int &topoNum, int &topo[n]) {
3    color[start] = GRAY;
4    foreach (next in adj[start]) {
5      // if (color[next] == GRAY) throw "Graph ist zyklisch";
6      if (color[next] == WHITE) {
7        DFS(adj, next, color, topoNum, topo);
8      }
9    }
10   topo[start] = ++topoNum;
11   color[start] = BLACK;
12 }

14 // Ausgabe der topologischen Zahl von Knoten v in topo[v]
15 void topoSort(List adj[n], int n, int &topo[n]) {
16   int color[n] = WHITE, topoNum = 0;
17   for (int v = 0; v < n; v++)
18     if (color[v] == WHITE)
19       DFS(adj, v, color, topoNum, topo);
20 }
```

Topologische Sortierung: Ergebnis



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave

Abhängigkeitsgraph, der topologischen Ordnung entsprechend gezeichnet.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
   - Daher ist w `BLACK`, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.
   - Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen.
   - Da `topoNum` immer größer wird, folgt `topo[v]` $>$ `topo[w]`.

Zeitkomplexität

Eine topologische Ordnung kann in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ bestimmt werden.

Übersicht

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion.
  $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Kantengewichteter Graph

Ein (kanten-)gewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e.

- Ein knotengewichteter Graph (V, E, W) lässt sich in einen kantengewichteten Graphen (V, E, W') überführen, indem *alle* von einem Knoten v ausgehenden Kanten $e = (v, \cdot) \in E$ das Gewicht $W'(e) = W(v)$ erhalten.

Gewichtete Graphen: Darstellung

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.
- Kantengewichte können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden.
  Ein besonderer Wert, etwa ∞ besagt, dass keine Kante existiert.

Gewichtete Graphen: Darstellung

- Bei der Adjazenzlistendarstellung von kantengewichteten Graphen wird das Gewicht jeweils mit in der Liste gespeichert:

Beispiel (Kantengewichteter Graph als Adjazenzlisten)

```
// bisher (ohne Gewichte):
List adj[n]; // wobei List im Grunde "List<int>" war, also:
List<int> adj[n];

// neu (mit Gewichten):
struct Edge {
  int target;
  float weight;
}
List<Edge> adj[n];
// wir verwenden aber weiterhin die Kurzschreibweise:
List adj[n]; // ggf. mit Gewichten
```


Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

- Wir betrachten hier *nur* knotengewichtete DAGs.

Beispiel (Anwendung)

Wie lange benötigt man für die Ausführung der bereits vorgestellten Aufgaben mindestens, wenn für jede Aufgabe eine Dauer gegeben ist und unabhängige Aufgaben gleichzeitig erledigt werden können?

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time, est) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.

Der früheste Endzeitpunkt (earliest finish time) für Aufgabe v ($eft(v)$) ist gleich $est(v)$ plus der Dauer von v.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

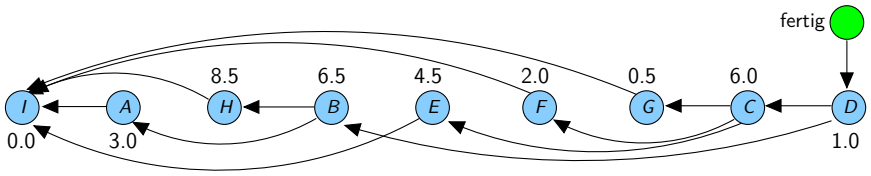
- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$.
- $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Es gibt eine kritische Abhängigkeit zwischen v_{i-1} und v_i, d.h. eine Verzögerung in v_{i-1} führt zu einer Verzögerung in v_i.

Kritische-Pfad-Analyse: Implementierung

```
1  // Knotengewichte in duration.
2  // Ausgabe: eft, kritischer Pfad kodiert in critDep
3  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
4                 int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]) {
5    color[start] = GRAY; critDep[start] = -1; int est = 0;
6    foreach (next in adj[start]) {
7      if (color[next] == WHITE)
8        DFS(adj, next, color, duration, critDep, eft);
9      if (eft[next] >= est) {
10       est = eft[next]; critDep[start] = next;
11     }
12   }
13   eft[start] = est + duration[start];
14   color[start] = BLACK;
15 }
16 void critPath(List adj[n], int n,
17               int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]){
18   int color[n] = WHITE;
19   for (int i = 0; i < n; i++)
20     if (color[i] == WHITE)
21       DFS(adj, i, color, duration, critDep, eft);
22 }
```

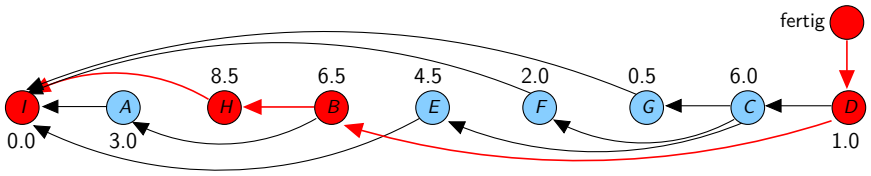

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

- $eft = 1 + 6.5 + 8.5 + 0 = 16$.