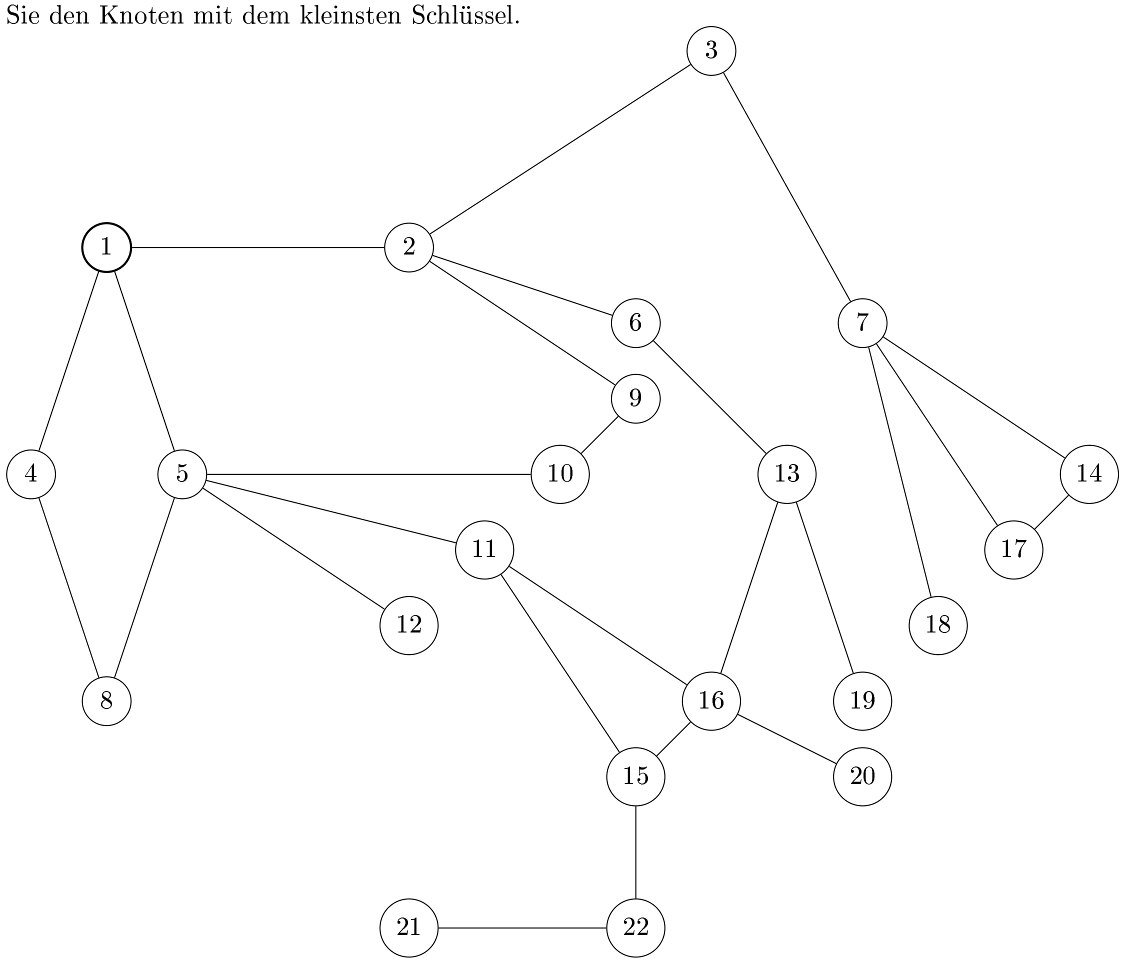
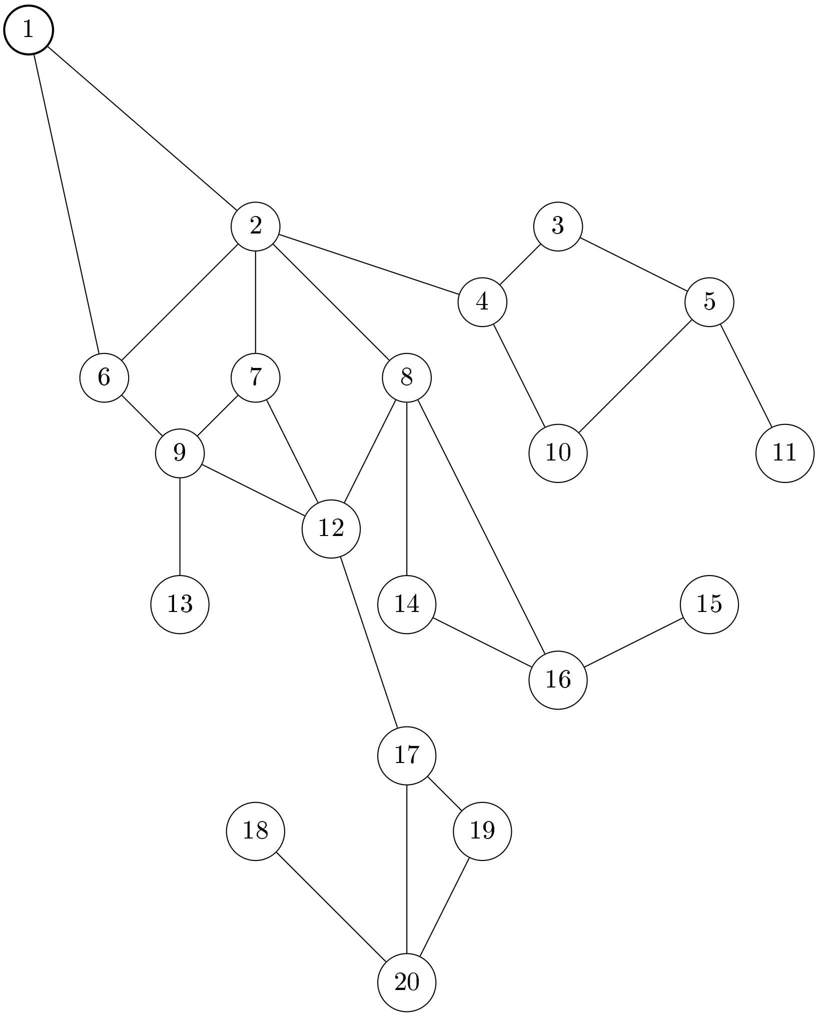
Tutoraufgabe 1 (Suchen in Graphen):

a) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Breitensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



b) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Tiefensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



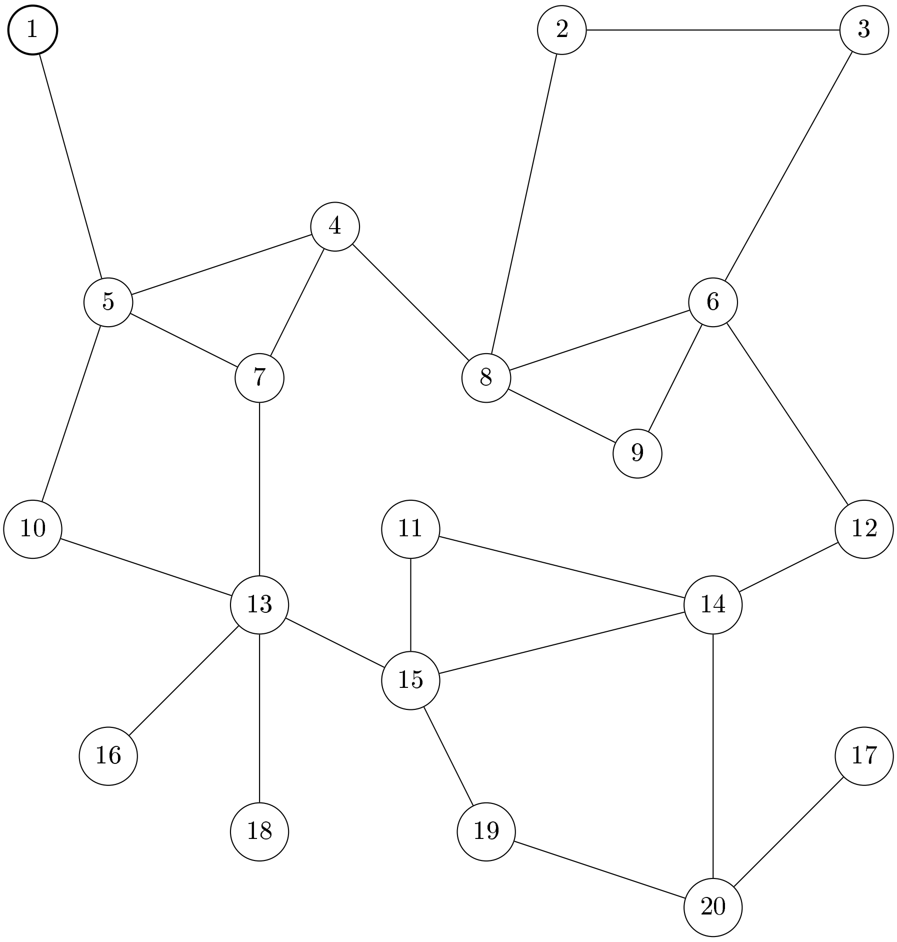
Lösung:

a) 1,2,4,5,3,6,9,8,10,11,12,7,13,15,16,14,17,18,19,22,20,21

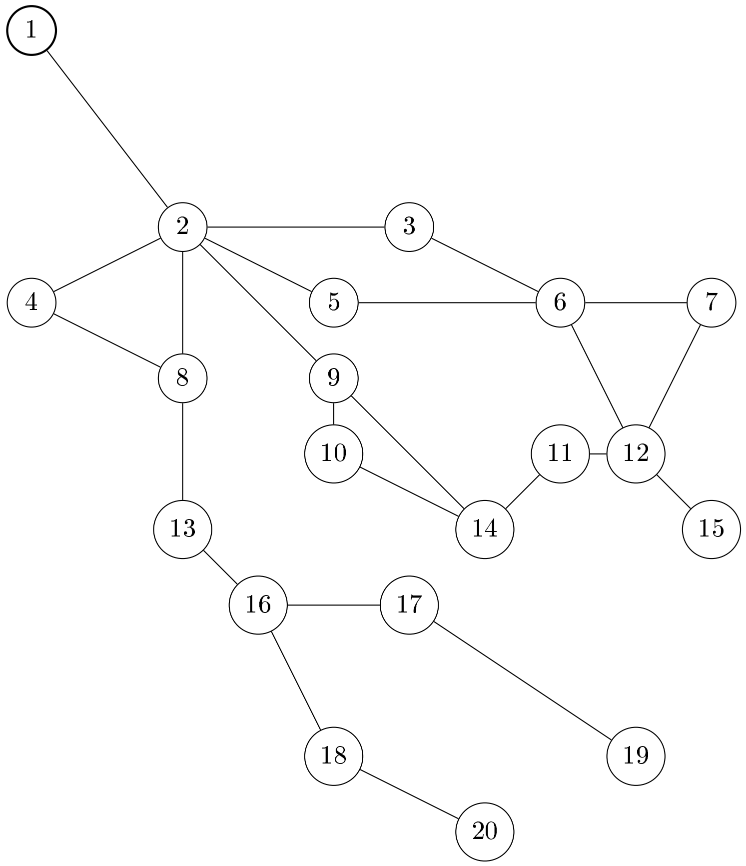
b) 1,2,4,3,5,10,11,6,9,7,12,8,14,16,15,17,19,20,18,13

Aufgabe 2 (Suchen in Graphen): (1,5 + 1,5 = 3 Punkte)

a) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Breitensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



b) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Tiefensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



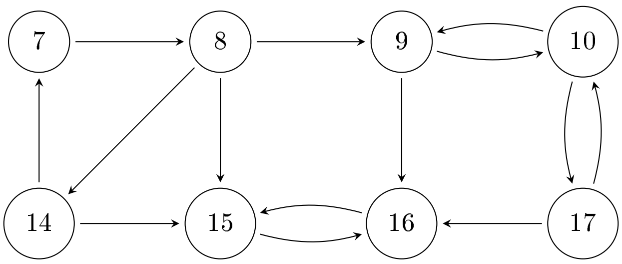
Lösung:

a) 1,5,4,7,10,8,13,2,6,9,15,16,18,3,12,11,14,19,20,17

b) 1,2,3,6,5,7,12,11,14,9,10,15,4,8,13,16,17,19,18,20

Tutoraufgabe 3 (Zusammenhangskomponenten):

Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten im folgenden Graph an. Für jede dieser starken Zusammenhangskomponenten reicht es die Menge der Knoten anzugeben, die darin auftreten.



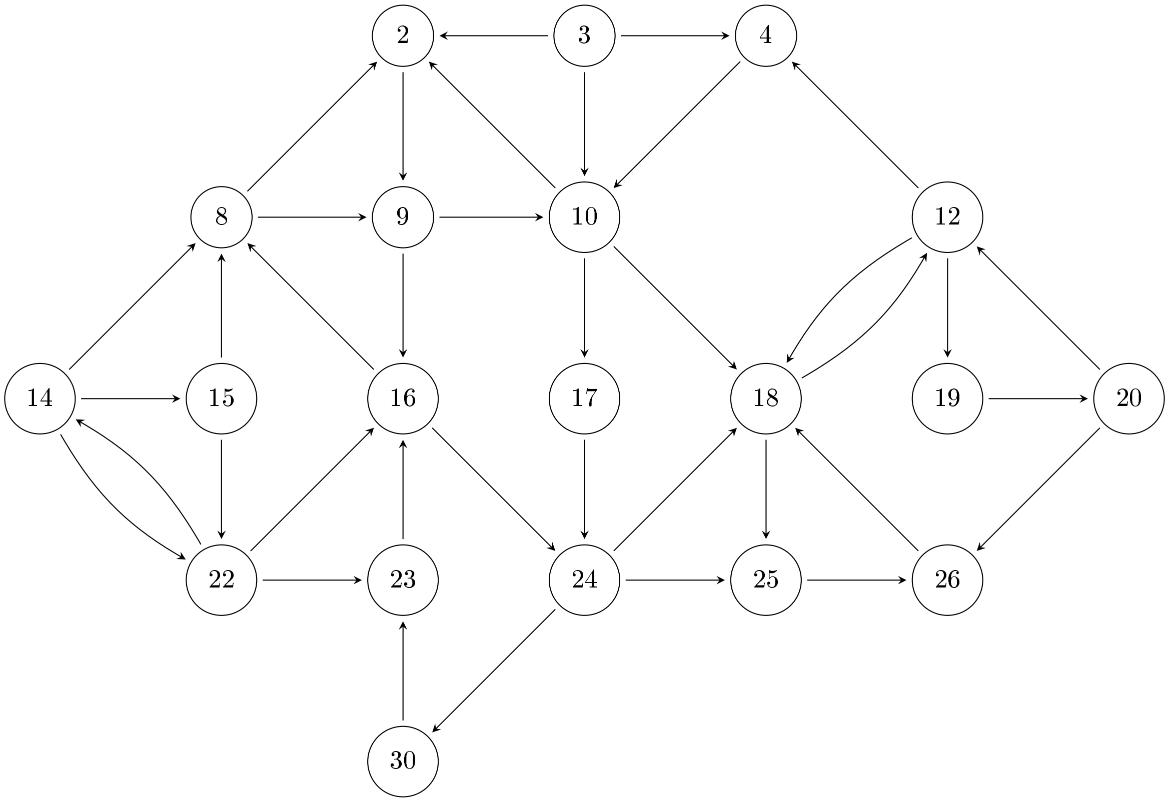
Lösung:

Der gegebene Graph hat folgende starken Zusammenhangskomponenten:

$\{7,\ 8,\ 14\}$
$\{9,\ 10,\ 17\}$
$\{15,\ 16\}$

Aufgabe 4 (Zusammenhangskomponenten): (2 Punkte)

Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten im folgenden Graph an. Für jede dieser starken Zusammenhangskomponenten reicht es die Menge der Knoten anzugeben, die darin auftreten.



Lösung:

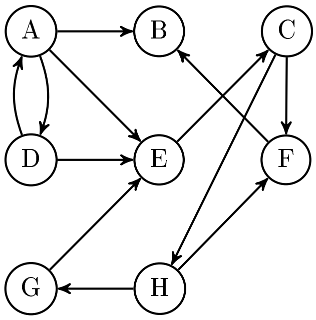
Der gegebene Graph hat folgende starken Zusammenhangskomponenten:

$\{14,\ 15,\ 22\}$
$\{3\}$
$\{2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 30\}$

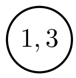
Tutoraufgabe 5 (Beweis):

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$.
Die *Transposition* von G ist der Graph $G^T = (V, E^T)$, wobei $(u, v) \in E^T \iff (v, u) \in E$ gilt. Intuitiv entsteht die Transposition eines Graphen also dadurch, dass man einfach alle Kanten umdreht.
Die *Kondensation* von G ist der Graph $G\downarrow\ = (\{V_1, \ldots, V_k\}, E')$, wobei $(V_i, V_j) \in E' \iff i \neq j \land \exists u \in V_i, v \in V_j : (u, v) \in E$ gilt. Intuitiv ist die Kondensation eines Graphen also die Reduzierung des Graphen auf seine starken Zusammenhangskomponenten – diese Teilgraphen werden in der Kondensation zu jeweils einem einzigen Knoten zusammengefasst.

a) Betrachten Sie den folgenden gerichteten Graphen G_1:



Geben Sie die Kondensation $G_1\downarrow$ von G_1 an. Beschriften Sie die Knoten in der Kondensation mit den Namen aller Knoten, die zur jeweiligen starken Zusammenhangskomponente gehören. Bilden beispielsweise die Knoten 1 und 3 eine starke Zusammenhangskomponente, so sieht der zugehörige Knoten in der Kondensation wie folgt aus:

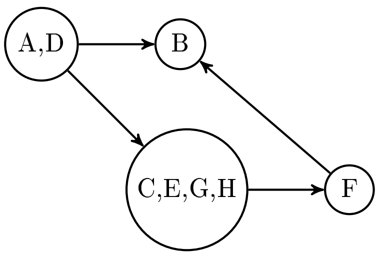


b) Geben Sie die Transposition G_1^T des Graphen G_1 aus der vorherigen Teilaufgabe an.

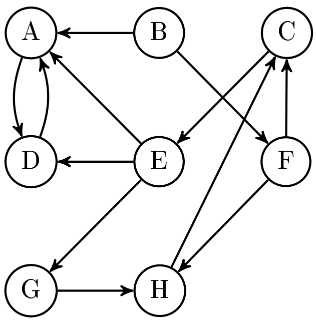
c) Zeigen Sie, dass für jeden gerichteten Graphen G gilt, dass die Transposition der Kondensation von G gleich der Kondensation der Transposition von G ist:

$$(G\downarrow)^T \;=\; (G^T)\downarrow$$

Lösung:



a)



b)

c) Behauptung: $(G^T)\downarrow \;=\; (G\downarrow)^T$

Beweis:
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann ist die Kondensation $G\downarrow$ von G

$$G\downarrow \;=\; (\{S_1, \ldots S_p\},\; \{(S_i, S_j) \mid i, j \in \{1, \ldots, p\}, i \neq j \wedge \exists (v, w) \in E : v \in S_i, w \in S_j\}),$$

wobei $\{S_1, \ldots, S_p\}$ die Menge der starken Zusammenhangskomponenten von G ist.

Die Transposition $(G\downarrow)^T$ von $G\downarrow$ ist dann

$$(G\downarrow)^T = (\{S_1, \ldots S_p\},\ \{(S_j, S_i) \mid i,j \in \{1,\ldots,p\}, i \neq j \wedge \exists (v,w) \in E : v \in S_i, w \in S_j\}).$$

Die Transposition G^T von G ist

$$G^T = (V,\ \{(w,v) \mid \exists (v,w) \in E\}).$$

Wir zeigen nun, dass die Knotenmengen der starken Zusammenhangskomponenten eines beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und seiner Transposition gleich sind. Sei dazu $S \subseteq V$ eine starke Zusammenhangskomponente von G. Also haben wir $\forall v, w \in S : (v,w) \in E \vee \exists k \geq 1, \{v, v_1, \ldots, v_k, w\} \subseteq S : (v, v_1) \in E, (v_k, w) \in E, \forall 1 < i \leq k : (v_{i-1}, v_i) \in E$ und für jeden Pfad in G von einem Knoten $v \in S$ zu einem Knoten $w \notin S$ gilt, dass es keinen Pfad von w zu v in G gibt. Damit haben wir für $G^T = (V, E^T)$, dass $\forall v, w \in S : (w,v) \in E^T \vee \exists k \geq 1, \{v, v_1, \ldots, v_k, w\} \subseteq S : (v_1, v) \in E^T, (w, v_k) \in E^T, \forall 1 < i \leq k : (v_i, v_{i-1}) \in E^T$ und für jeden Pfad in G^T von einem Knoten $w \notin S$ zu einem Knoten $v \in S$ gilt, dass es keinen Pfad von v zu w in G^T gibt. Da letzteres äquivalent zur Definition einer starken Zusammenhangskomponente ist, besitzt G^T eine starke Zusammenhangskomponente mit der gleichen Knotenmenge S. Da offensichtlich $(G^T)^T = G$ gilt, sind die Knotenmengen aller starken Zusammenhangskomponenten von G und G^T damit gleich.

Da für einen beliebigen gerichteten Graphen die Knotenmengen seiner starken Zusammenhangskomponenten und der seiner Transposition also gleich sind, ist die Kondensation $(G^T)\downarrow$ von $G^T = (V, E^T)$ demnach

$$(G^T)\downarrow = (\{S_1, \ldots S_p\},\ \{(S_j, S_i) \mid i,j \in \{1,\ldots,p\}, i \neq j \wedge \exists (w,v) \in E^T : w \in S_j, v \in S_i\})$$

Wegen $(w,v) \in E^T \Leftrightarrow (v,w) \in E$ gilt damit:

$$(G^T)\downarrow = (G\downarrow)^T$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Aufgabe 6 (Beweis): (8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter und azyklischer Graph (also ein Baum) und $v \in V$. Bestimmen Sie die Länge des kürzesten Pfades von v nach v, der jede Kante aus E mindestens einmal enthält. Beweisen Sie Ihr Ergebnis formal.

Lösung:

Behauptung: Die Länge des kürzesten Pfades von v nach v, welcher jede Kante aus E mindestens einmal enthält, ist genau $2 \cdot |E|$.

Beweis:
Zunächst zeigen wir (†), dass es einen Pfad von v nach v gibt, der jede Kante $(u,w) \in E$ genau zweimal enthält und zwar genau einmal von u nach w und einmal von w nach u. Dazu nutzen wir eine Induktion über die Anzahl der Knoten in V.

Induktionsanfang:
Da $v \in V$ gilt, kann G nicht leer sein. Also ist der einzige Graph mit der kleinstmöglichen Knotenanzahl (und den geforderten Eigenschaften) $G_0 = (\{v\}, \varnothing)$. Offensichtlich erfüllt der leere Pfad die Aussage (†), da es keine Kanten gibt.

Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage (†) gelte für alle Graphen $G' = (V', E')$ mit $|V'| < |V|$.

Induktionsschritt:
Wir betrachten den Graphen $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{(u,w) \mid u = v \vee w = v\})$. Dieser ist möglicherweise nicht zusammenhängend, setzt sich aber aus k zusammenhängenden Graphen $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ zusammen, wobei jeweils $|V| > |V_i| \geq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt. Außerdem gibt es zu jedem G_i einen Knoten $u_i \in V_i$, sodass $(u, v) \in E$, da G zusammenhängend ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also in jedem Graphen G_i einen Pfad von u_i nach u_i, der jede Kante aus G_i genau zweimal enthält, in jeder Richtung genau einmal. Wir konstruieren den gesuchten Pfad wie folgt: Von v aus nehmen wir alle Kanten außer denjenigen zu einem der u_i jeweils hin und zurück zu Beginn des Pfades. Dann nehmen wir für jedes $i \in \{1, \ldots k\}$ die Kante zu u_i gefolgt von dem Pfad, den es nach Induktionsvoraussetzung in G_i gibt. Dieser endet wieder in u_i, von wo aus wir schließlich die Kante zurück nach v nehmen. Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage (†) damit gezeigt.

Offensichtlich enthält der von uns konstruierte Pfad alle Kanten mindestens einmal, geht von v nach v und hat die Länge $2 \cdot |E|$. Es bleibt zu zeigen, dass es keinen kürzeren Pfad mit den geforderten Eigenschaften gibt. Dies zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen es gäbe einen kürzeren Pfad von v nach v, der jede Kante mindestens einmal enthält. Dies bedeutet, dass es eine Kante $(u, w) \in E$ gibt, welche in diesem Pfad nur einmal verwendet wird. Demnach ist v von w aus und u von v aus ohne die Kante (u, w) erreichbar. Es gibt also einen Pfad von w nach u ohne die Kante (u, w). Zusammen mit dieser Kante würde sich demnach ein Zyklus in G ergeben. Da G aber azyklisch ist, ist dies nicht möglich und der Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch sein muss. $\square$