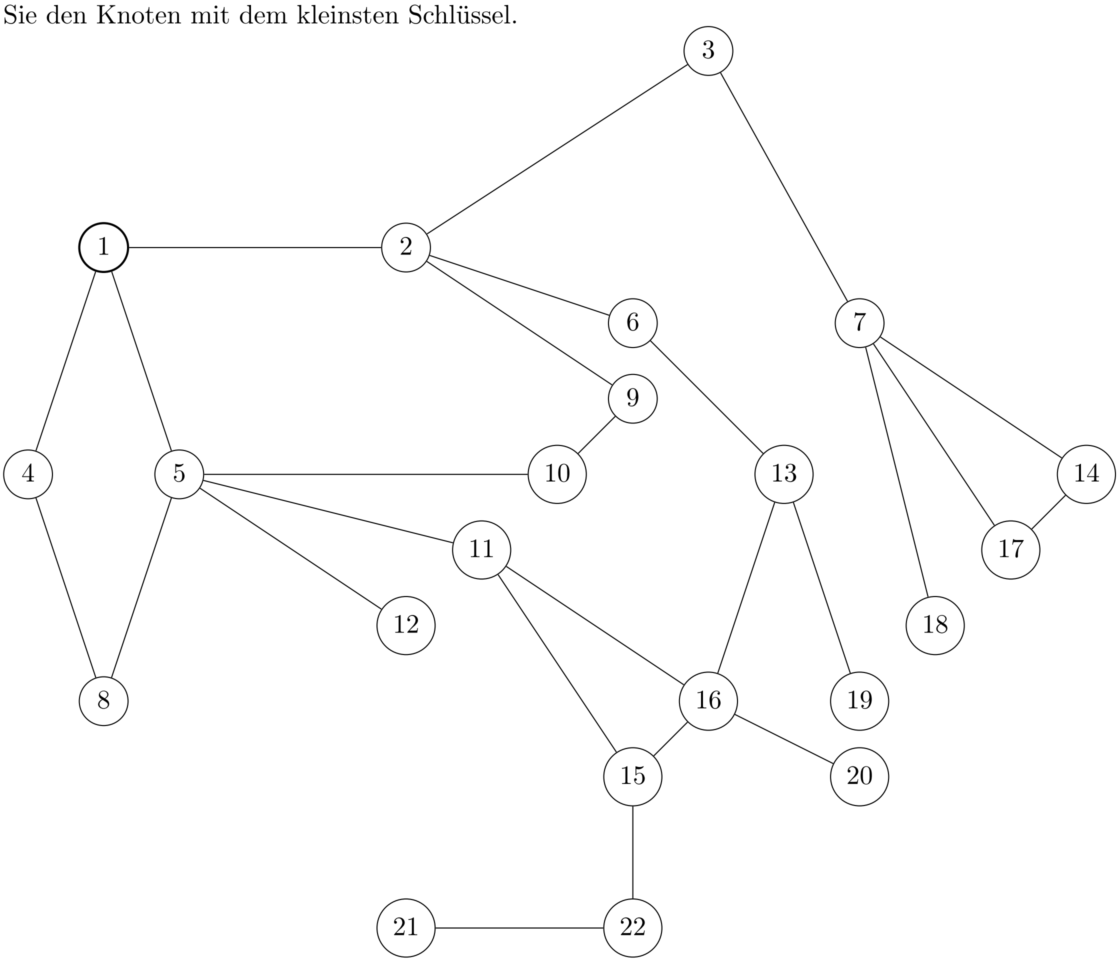
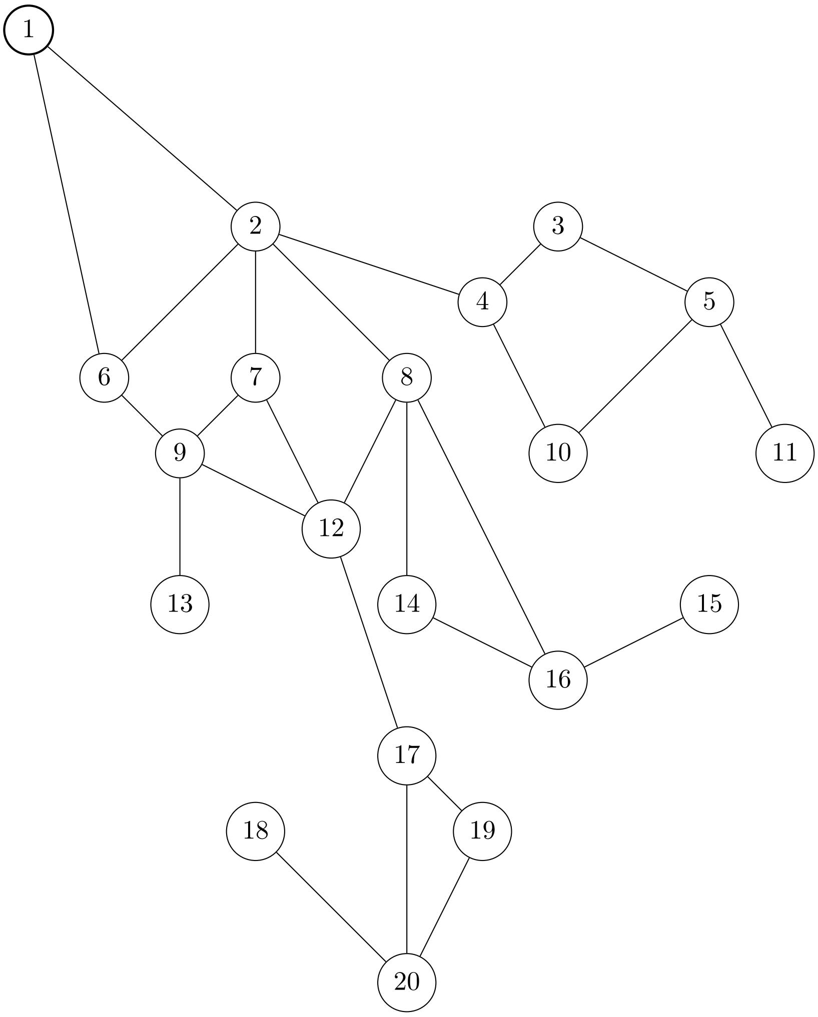
Tutoraufgabe 1 (Suchen in Graphen):

a) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Breitensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



b) Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden, wenn auf dem folgenden Graphen **Tiefensuche** ausgehend von Knoten **1** ausgeführt wird. Wenn mehrere Knoten zur Wahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Schlüssel.



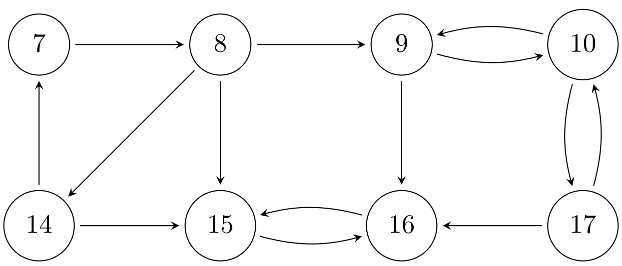
Lösung:

a) 1,2,4,5,3,6,9,8,10,11,12,7,13,15,16,14,17,18,19,22,20,21

b) 1,2,4,3,5,10,11,6,9,7,12,8,14,16,15,17,19,20,18,13

Tutoraufgabe 3 (Zusammenhangskomponenten):

Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten im folgenden Graph an. Für jede dieser starken Zusammenhangskomponenten reicht es die Menge der Knoten anzugeben, die darin auftreten.



Lösung:

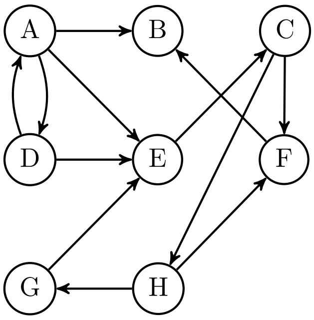
Der gegebene Graph hat folgende starken Zusammenhangskomponenten:

$$\{7,\ 8,\ 14\}$$
$$\{9,\ 10,\ 17\}$$
$$\{15,\ 16\}$$

Tutoraufgabe 5 (Beweis):

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$.
Die *Transposition* von G ist der Graph $G^T = (V, E^T)$, wobei $(u, v) \in E^T \iff (v, u) \in E$ gilt. Intuitiv entsteht die Transposition eines Graphen also dadurch, dass man einfach alle Kanten umdreht.
Die *Kondensation* von G ist der Graph $G\downarrow\ = (\{V_1, \dots, V_k\}, E')$, wobei $(V_i, V_j) \in E' \iff i \neq j \wedge \exists u \in V_i, v \in V_j : (u, v) \in E$ gilt. Intuitiv ist die Kondensation eines Graphen also die Reduzierung des Graphen auf seine starken Zusammenhangskomponenten – diese Teilgraphen werden in der Kondensation zu jeweils einem einzigen Knoten zusammengefasst.

a) Betrachten Sie den folgenden gerichteten Graphen G_1:



Geben Sie die Kondensation $G_1\downarrow$ von G_1 an. Beschriften Sie die Knoten in der Kondensation mit den Namen aller Knoten, die zur jeweiligen starken Zusammenhangskomponente gehören. Bilden beispielsweise die Knoten 1 und 3 eine starke Zusammenhangskomponente, so sieht der zugehörige Knoten in der Kondensation wie folgt aus:

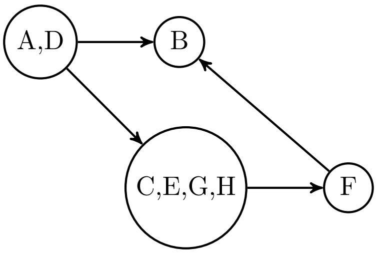
$$1, 3$$

b) Geben Sie die Transposition G_1^T des Graphen G_1 aus der vorherigen Teilaufgabe an.

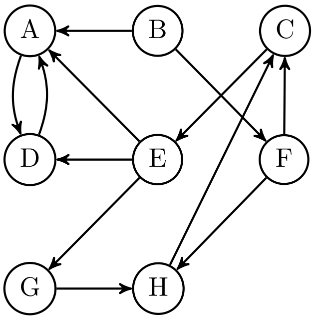
c) Zeigen Sie, dass für jeden gerichteten Graphen G gilt, dass die Transposition der Kondensation von G gleich der Kondensation der Transposition von G ist:

$$(G\downarrow)^T = (G^T)\downarrow$$

Lösung:



a)



b)

c) Behauptung: $(G^T)\downarrow \;=\; (G\downarrow)^T$

Beweis:
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann ist die Kondensation $G\downarrow$ von G

$$G\downarrow \;=\; (\{S_1, \dots S_p\},\ \{(S_i, S_j) \mid i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \wedge \exists (v, w) \in E : v \in S_i, w \in S_j\}),$$

wobei $\{S_1, \dots, S_p\}$ die Menge der starken Zusammenhangskomponenten von G ist.
Die Transposition $(G\downarrow)^T$ von $G\downarrow$ ist dann

$$(G\downarrow)^T \;=\; (\{S_1, \dots S_p\},\ \{(S_j, S_i) \mid i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \wedge \exists (v, w) \in E : v \in S_i, w \in S_j\}).$$

Die Transposition G^T von G ist

$$G^T \;=\; (V,\ \{(w, v) \mid \exists (v, w) \in E\}).$$

Wir zeigen nun, dass die Knotenmengen der starken Zusammenhangskomponenten eines beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und seiner Transposition gleich sind. Sei dazu $S \subseteq V$ eine starke Zusammenhangskomponente von G. Also haben wir $\forall v, w \in S : (v, w) \in E \vee \exists k \geq 1, \{v, v_1, \dots, v_k, w\} \subseteq S : (v, v_1) \in E, (v_k, w) \in E, \forall 1 < i \leq k : (v_{i-1}, v_i) \in E$ und für jeden Pfad in G von einem Knoten $v \in S$ zu einem Knoten $w \notin S$ gilt, dass es keinen Pfad von w zu v in G gibt. Damit haben wir für $G^T = (V, E^T)$, dass $\forall v, w \in S : (w, v) \in E^T \vee \exists k \geq 1, \{v, v_1, \dots, v_k, w\} \subseteq S : (v_1, v) \in E^T, (w, v_k) \in E^T, \forall 1 < i \leq k : (v_i, v_{i-1}) \in E^T$ und für jeden Pfad in G^T von einem Knoten $w \notin S$ zu einem Knoten $v \in S$ gilt, dass es keinen Pfad von v zu w in G^T gibt. Da letzteres äquivalent zur Definition einer starken Zusammenhangskomponente ist, besitzt G^T eine starke Zusammenhangskomponente mit der gleichen Knotenmenge S. Da offensichtlich $(G^T)^T = G$ gilt, sind die Knotenmengen aller starken Zusammenhangskomponenten von G und G^T damit gleich.

Da für einen beliebigen gerichteten Graphen die Knotenmengen seiner starken Zusammenhangskomponenten und der seiner Transposition also gleich sind, ist die Kondensation $(G^T)\downarrow$ von $G^T = (V, E^T)$ demnach

$$(G^T)\downarrow \;=\; (\{S_1, \dots S_p\},\ \{(S_j, S_i) \mid i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \wedge \exists (w, v) \in E^T : w \in S_j, v \in S_i\})$$

Wegen $(w, v) \in E^T \;\Leftrightarrow\; (v, w) \in E$ gilt damit:

$$(G^T)\downarrow \;=\; (G\downarrow)^T$$

Damit ist die Aussage gezeigt. $\square$