Prof. Dr. E. Ábrahám
F. Corzilius, S. Schupp, T. Ströder

1. Klausur Datenstrukturen und Algorithmen SS 2014

Vorname: _____

Nachname: _____

Matrikelnummer: _____

Studiengang (bitte **genau** einen markieren):

- ○ Informatik Bachelor
- ○ Informatik Lehramt (Bachelor)
- ○ Sonstiges: _____
- ○ Mathematik Bachelor
- ○ CES Bachelor

	Anzahl Punkte	Erreichte Punkte
Aufgabe 1	**25**	
Aufgabe 2	**13**	
Aufgabe 3	**27**	
Aufgabe 4	**10**	
Aufgabe 5	**26**	
Aufgabe 6	**12**	
Aufgabe 7	**7**	
Summe	**120**	

Allgemeine Hinweise:

- Schreiben Sie **auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) **Ihren Vornamen, Ihren Nachnamen und Ihre Matrikelnummer**.
- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit **dokumentenechten** Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Beantworten Sie die Aufgaben auf den ausgeteilten Aufgabenblättern.
- Geben Sie für jede Aufgabe **maximal eine** Lösung an. Streichen Sie alles andere durch. Andernfalls werden alle Lösungen der Aufgabe mit **0 Punkten** bewertet.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Klausur **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (Laufzeitanalyse): (5 + 7 + 5 + 8 = 25 Punkte)

a) Beweisen oder widerlegen Sie: $\frac{n^2 \cdot (\sqrt{n})^3}{n^3+1} \in \Omega(n)$

b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\Pi_{i=1}^{n}(i+n) \in \mathcal{O}(n^{2n})$

c) Bestimmen Sie die Komplexitätsklasse der folgenden Rekursionsgleichung mithilfe des **Mastertheorems** oder begründen Sie, warum das Mastertheorem nicht anwendbar ist.

$$T(n) = \begin{cases} 16 \cdot T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n^3} & \text{für } n > 1 \\ 5 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erinnerung Mastertheorem: $E = \log_b(a)$ (alternativ $b^E = a$) und

$f(n) \in \mathcal{O}(n^{E-\epsilon}), \epsilon > 0$ $\rightarrow T(n) \in \Theta(n^E)$

$f(n) \in \Theta(n^E)$ $\rightarrow T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log(n))$

$f(n) \in \Omega(n^{E+\epsilon}), \epsilon > 0$ und $a \cdot f(n/b) \leq d \cdot f(n), d < 1$ $\rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

d) Geben Sie die **Rekursionsgleichung** für die Laufzeit des folgenden Algorithmus an. Dabei sind die elementaren Operationen $\{+, -, *, /\} \in \mathcal{O}(1)$. Zuweisungen und Vergleiche können vernachlässigt werden.

- Geben Sie an, welche der Parameter einen Einfluss auf die Laufzeit haben.
- Für Verzweigungen im Kontrollfluss nutzen Sie bitte die Fallunterscheidung wie in der Vorlesung vorgestellt.

```
int function(int a, int b) {
  int n = b;
  int twoB = b;
  while(n > 0) {
    twoB = twoB + 1;
    n = n - 1;
  }
  if(a > 10) {
    return function(a/2,b) + function(a/2,b) + 2*function(a/2,b);
  } else if (a < 10 && a > 0) {
    return function(a/3,b-1) + function(a/3,b-1);
  } else {
    return 43;
  }
}
```

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 (Sortierverfahren): (3 + 5 + 5 = 13 Punkte)

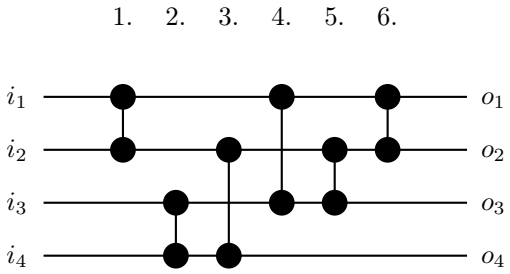
a) Sortieren Sie das Array `[ 8,5,1,9,7,3,2 ]` durch Anwendung des **Insertionsort**-Algorithmus **aus der Vorlesung**. Geben Sie dazu das Array **nach jeder Iteration der äußersten Schleife** an. Die Anzahl der vorgegebenen Zeilen muss nicht mit der Anzahl benötigter Schritte übereinstimmen.

8	5	1	9	7	3	2

b) Sortieren Sie das Array `[ 7,6,5,9,4,8,2,3 ]` durch Anwendung des **Quicksort**-Algorithmus **aus der Vorlesung**. Geben Sie dazu das Array **nach jeder Partition-Operation** an. Denken Sie daran, dass im Algorithmus aus der Vorlesung sowohl die Wahl des Pivot-Elements als auch das Verfahren zur Partitionierung festgelegt sind. Die Anzahl der vorgegebenen Zeilen muss nicht mit der Anzahl benötigter Schritte übereinstimmen.

7	6	5	9	4	8	2	3

c) Ein Sortiernetzwerk ist ein Schaltkreis für n Eingangssignale (Schlüssel) $i_1, \ldots, i_n$, welcher diese Signale sortiert auf n Ausgangssignale $o_1 \leq \cdots \leq o_n$ abbildet. Dazu dürfen lediglich Komparatorschaltungen als senkrechte Verbindungen zwischen jeweils zwei Leitungen i und j mit $i < j$ genutzt werden, welche die beiden Signale tauschen, wenn das Signal auf Leitung i größer als das Signal auf Leitung j ist. Ansonsten werden die Signale unverändert weitergeleitet. Das folgende Netzwerk ist zum Beispiel ein Sortiernetzwerk für 4 Signale:



Hier werden zunächst die Signale auf den Leitungen 1 und 2 miteinander verglichen und in korrekter Reihenfolge weitergeleitet. Anschließend werden die Signale auf den Leitungen 3 und 4 verglichen usw., sodass am Ende die Ausgangssignale o_1 bis o_4 den Schaltkreis in sortierter Reihenfolge verlassen. Zur Illustration wenden wir das Netzwerk auf die Beispieleingabe $i_1 = 5$, $i_2 = 3$, $i_3 = 4$, $i_4 = 1$ an und geben die Werte auf den Leitungen 1 bis 4 unmittelbar nach den Schritten 1. bis 6. an:

1.) $3, 5, 4, 1$

2.) $3, 5, 1, 4$

3.) $3, 4, 1, 5$

4.) $1, 4, 3, 5$

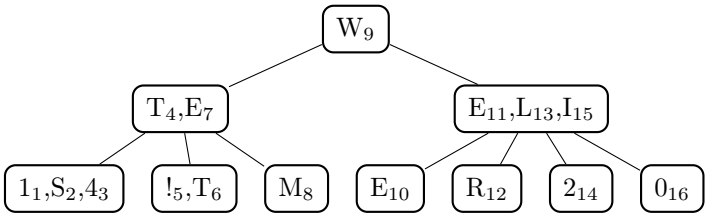
5.) $1, 3, 4, 5$

6.) $1, 3, 4, 5$

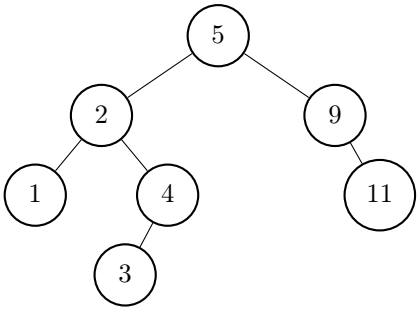
Geben Sie ein Sortiernetzwerk für 5 Signale an, welches die 5 Eingangssignale gemäß dem **Bubblesort**-Algorithmus **aus der Vorlesung** sortiert auf die 5 Ausgangssignale abbildet (Sie können dazu annehmen, dass `lengthOfE` aus dem Algorithmus in jeder Iteration um genau 1 reduziert wird).

Aufgabe 3 (Bäume): (4 + 5 + 5 + 7 + 3 + 3 = 27 Punkte)

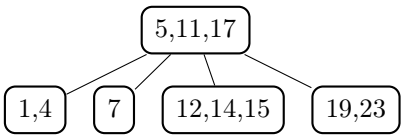
a) **Überführen** Sie den folgenden **2-3-4-Baum** in einen **Rot-Schwarz-Baum**. Nehmen Sie beim Überführen von einem 3-er Knoten den **rechten** Schlüssel als Wurzel. Beachten Sie, dass rote Knoten rund und schwarze Knoten eckig dargestellt werden.
Hinweis: Die Schlüssel sind die kleinen Zahlen rechts neben den im Knoten enthaltenen Daten.



b) Löschen Sie den Wert 9 aus dem folgenden **AVL-Baum** und geben Sie die entstehenden Bäume nach jeder **Löschoperation** sowie jeder **Rotation** an:



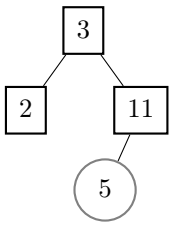
c) Fügen Sie den Wert 13 in den folgenden **2-3-4-Baum** ein und geben Sie den dabei entstehenden Baum an:



d) Fügen Sie den Wert 7 in den folgenden **Rot-Schwarz-Baum** ein und geben Sie die entstehenden Bäume nach

- jeder **Einfügeoperation**,
- jeder **Rotation** sowie
- jeder **Umfärbung** an.

Beachten Sie, dass rote Knoten rund und schwarze Knoten eckig dargestellt werden.



e) Geben Sie einen Baum der Tiefe 4 mit minimaler Knotenanzahl an, welcher **2-höhenbalanciert** ist.

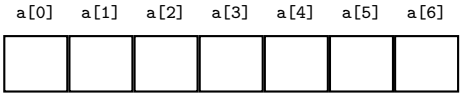
f) Geben Sie einen Binärbaum mit den Schlüsselwerten von 0 bis 6 an, der bei **Inorder-Traversierung** die Schlüssel in folgender Reihenfolge ausgibt:

0, 5, 2, 3, 4, 1, 6

Aufgabe 4 (Hashing): (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

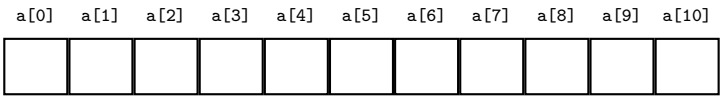
a) Fügen Sie die folgenden Werte in das unten stehende Array `a` der Länge 7 unter Verwendung der **Divisionsmethode** mit **linearer Sondierung** ein ($f(n,i) = ((n \mod 7) + i) \mod 7$):

5, 7, 4, 11, 0, 12.



b) Fügen Sie die folgenden Werte in das unten stehende Array `a` der Länge 11 unter Verwendung der **Divisionsmethode** mit **quadratischer Sondierung** ($c_1 = 0.0$, $c_2 = 1.0$) ein ($f(n,i) = ((n \mod 11) + 0.0 \cdot i + 1.0 \cdot i^2) \mod 11$):

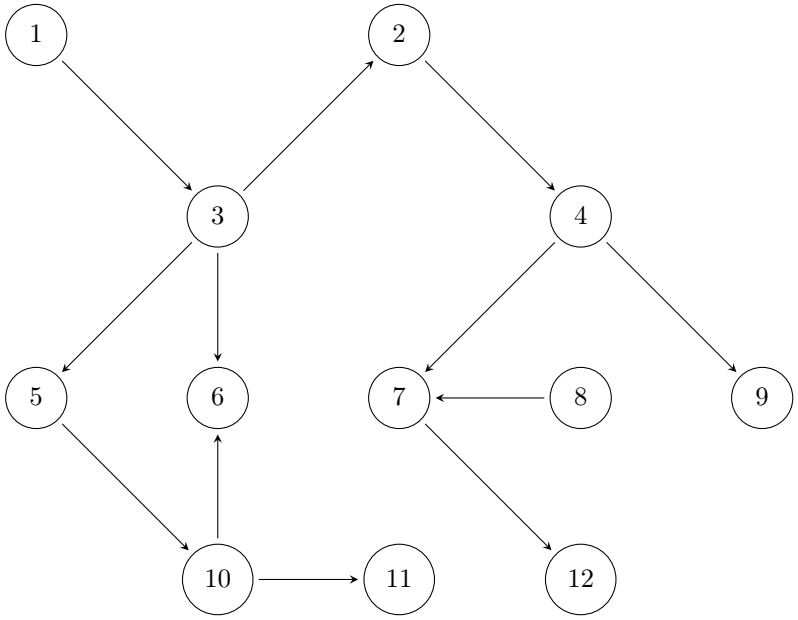
3, 7, 14, 25, 1, 12.



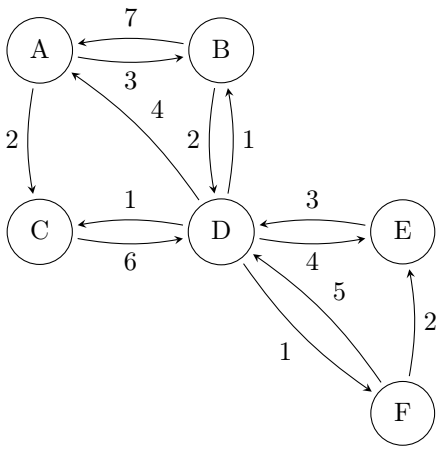
c) Nennen Sie die **vier Eigenschaften**, nach denen eine **Hashfunktion qualitativ beurteilt** werden kann.

Aufgabe 5 (Graphen): (4 + 7 + 10 + 5 = 26 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine **topologische Sortierung** unter Verwendung des **in der Vorlesung** vorgestellten Algorithmus für den folgenden Graphen. Im gesamten Algorithmus werden Knoten in aufsteigender Reihenfolge ihrer Schlüssel berücksichtigt. Als Ergebnis geben Sie die Liste der Knotenschlüssel in aufsteigender Reihenfolge der Topologiewerte an.



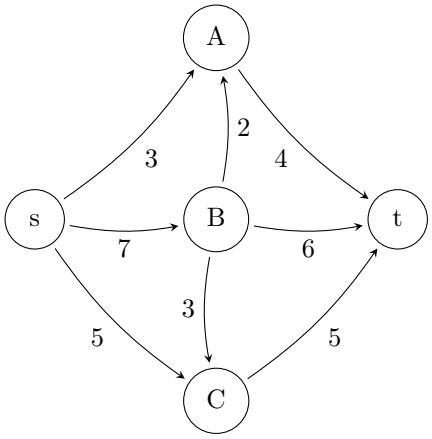
b) Betrachten Sie den folgenden Graphen:



Führen Sie den **Dijkstra** Algorithmus auf diesem Graphen mit dem **Startknoten A** aus. Füllen Sie dazu die nachfolgende Tabelle aus, indem Sie den Wert von `v` und `key` **nach jeder Iteration** der `while`-Schleife eintragen:

`v`	A				
`key[A]`					
`key[B]`					
`key[C]`					
`key[D]`					
`key[E]`					
`key[F]`					

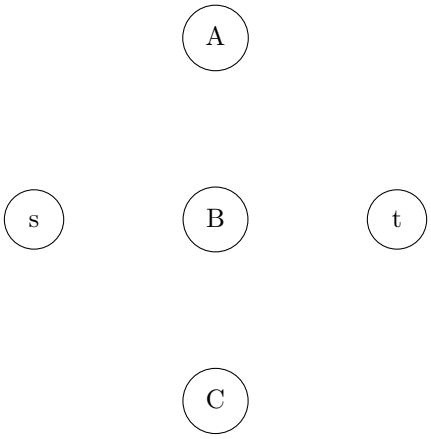
c) Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t:



Berechnen Sie den maximalen Fluss in diesem Netzwerk mithilfe der **Ford-Fulkerson Methode**. Geben Sie dazu **jedes Restnetzwerk (auch das initiale)** sowie **nach jeder Augmentierung** den aktuellen Zustand des Flussnetzwerks an. Geben Sie außerdem den **Wert des maximalen Flusses** an. Die vorgegebene Anzahl an Lösungsschritten muss nicht mit der benötigten Anzahl solcher Schritte übereinstimmen.

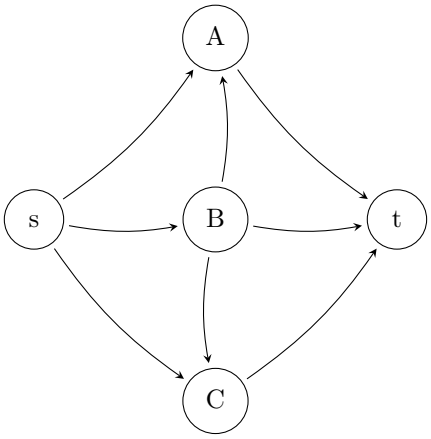
Schritt 1:

Restnetzwerk:



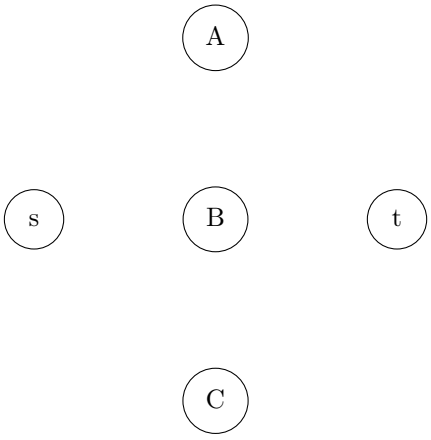
Schritt 2:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



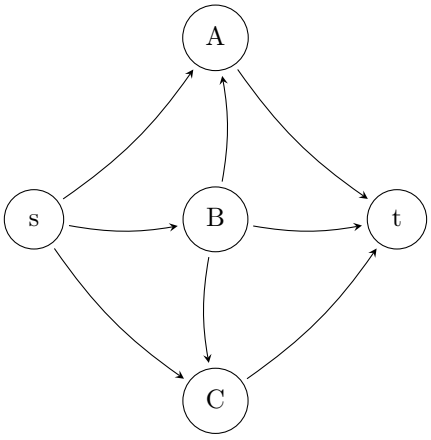
Schritt 3:

Restnetzwerk:



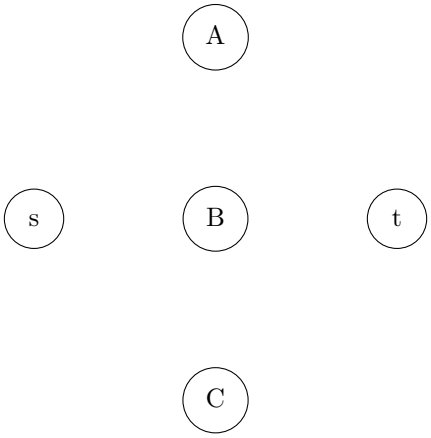
Schritt 4:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



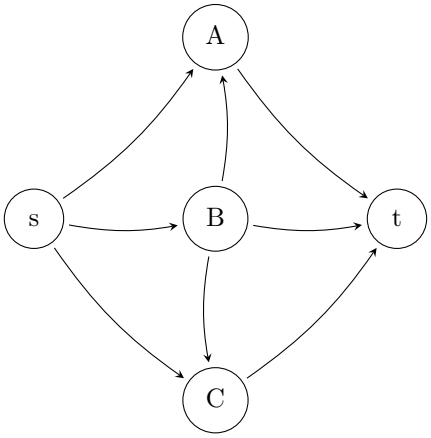
Schritt 5:

Restnetzwerk:



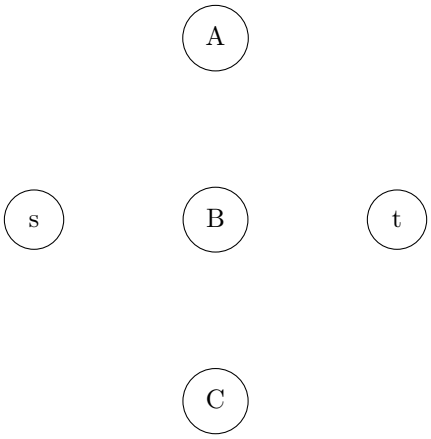
Schritt 6:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



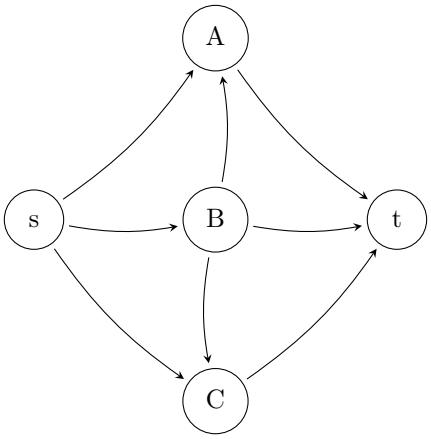
Schritt 7:

Restnetzwerk:



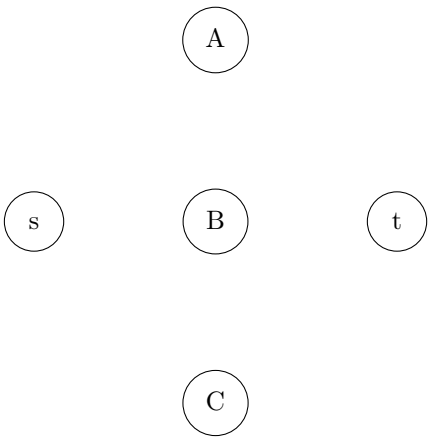
Schritt 8:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



Schritt 9:

Restnetzwerk:



Der maximale Fluss hat den Wert:

d) Beweisen oder widerlegen Sie:

Der **Kondensationsgraph** $G{\downarrow} = (V',\ E')$ eines gerichteten Graphen $G = (V,\ E)$ ist **azyklisch**.

Aufgabe 6 (Dynamische Programmierung): (2 + 10 = 12 Punkte)

a) Was ist **Memoization** und worauf kann man es anwenden?

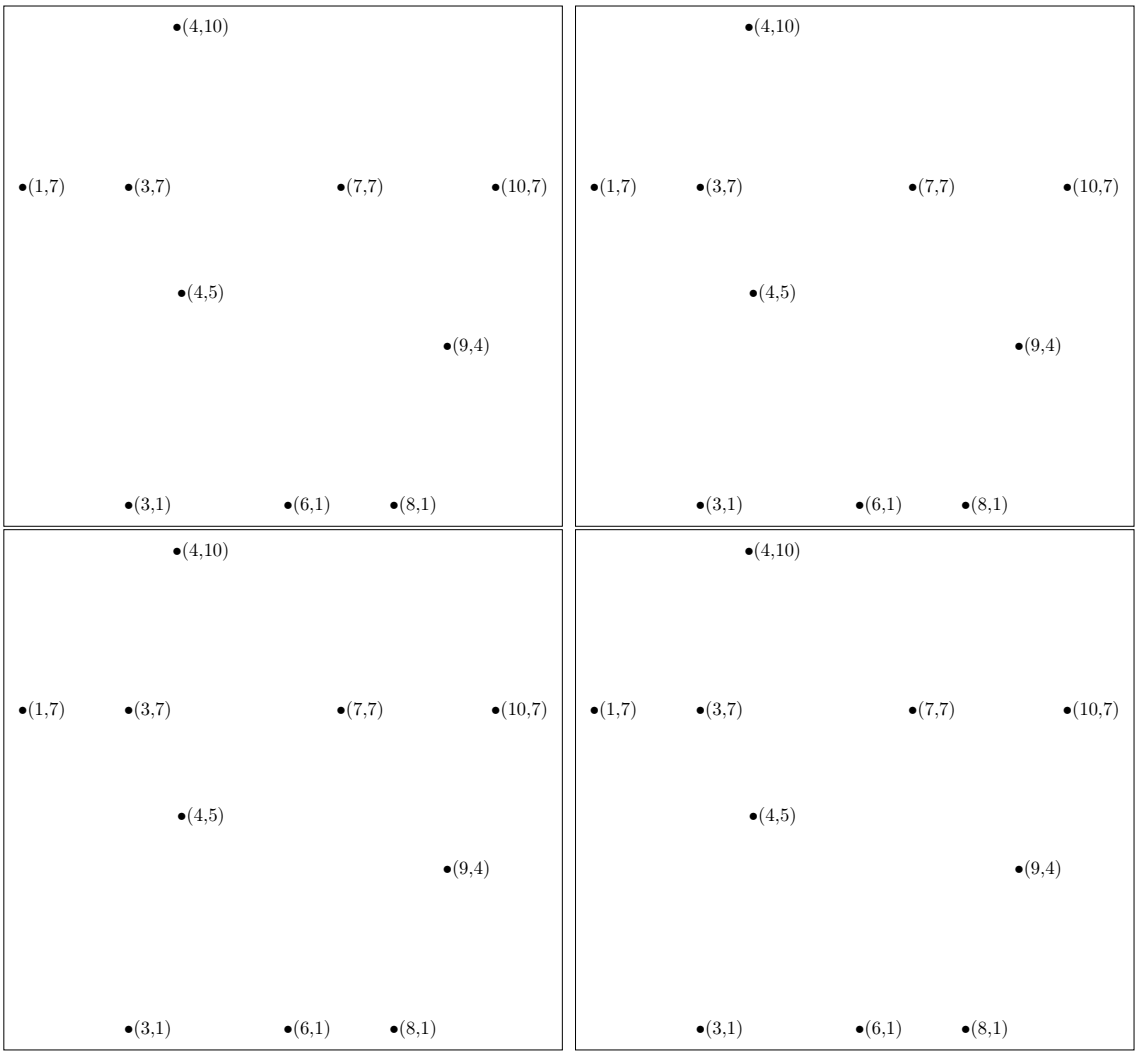
b) Gegeben sei ein Rucksack mit **maximaler Tragkraft** 10 sowie 4 **Gegenstände**. Der i-te Gegenstand soll hierbei ein Gewicht von w_i und einen Wert von c_i haben. Bestimmen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zum Lösen des Rucksackproblems mit dynamischer Programmierung den maximalen Gesamtwert der Gegenstände, die der Rucksack tragen kann (das Gesamtgewicht der mitgeführten Gegenstände übersteigt nicht die Tragkraft des Rucksacks). Die **Gewichte** seien dabei $w_0 = 4$, $w_1 = 5$, $w_2 = 3$ und $w_3 = 6$ und die **Werte** $c_0 = 3$, $c_1 = 4$, $c_2 = 2$ und $c_3 = 5$. Geben Sie zudem die vom Algorithmus bestimmte Tabelle `C` an und beschreiben Sie anhand der Tabelle wie man die mitzunehmenden Gegenstände bestimmen kann, um den maximalen Wert zu erreichen.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											

Aufgabe 7 (Geometrische Algorithmen): (2 + 5 = 7 Punkte)

a) Geben Sie die Definition einer **konvexen Hülle** an.

b) Berechnen Sie die konvexe Hülle der folgenden Punktmenge. Benutzen Sie dafür **Grahams Scan** wie **in der Vorlesung** vorgestellt und geben Sie die Teilschritte **nach jeder Iteration** (also nach jedem neu hinzugefügten Punkt) an. Umkreisen Sie die Punkte, die vom Algorithmus in der Iterationsschleife nicht betrachtet werden.



Name: **Matrikelnummer:**